Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

LØSNINGSFORSLAG EKSAMEN 21. mai

1 Se læreboken.

2 **a)** Se læreboken, Teorem 6.3.2.

b) Hvis $\overline{AB} \cong \overline{DE}$ følger påstanden av SAS. Vi kan anta, uten tap av generalitet at $DE < AB$. Da finnes et punkt A' på $\overline{AB}$ slik at $\overline{A'B} \cong \overline{DE}$. Da er $\triangle A'BC \cong \triangle DEF$ (SAS), slik at $\angle BA'C \cong \angle EDF \cong \angle BAC$. Men $\angle BA'C$ er ytre vinkel til trekanten $\triangle AA'C$, så dette strider mot ytre vinkel teoremet.

3 **a)** Se læreboken, Definisjon 6.9.8 og 6.9.9.

b) Det følger av SAS at trekantene $\triangle DAB$ og $\triangle CBA$ er kongruente. Det følger at diagonalene $\overline{BD}$ og $\overline{AC}$ er kongruente, som igjen medfører at $\triangle ACD \cong \triangle BDC$ (SSS). Da er $\angle ADC \cong \angle BCD$. Vinkelsummen i en konveks firkant er $\leq 360°$.

4 **a)** La S være senter i σ, og la I_σ være inversjon med hensyn på σ. Siden $\sigma \perp \alpha$ og $A \in \alpha$ må $I_\alpha(A) \in \alpha$. Siden $\sigma \perp \gamma$ og $A \in \gamma$ må $I_\alpha(A) \in \gamma$. Altså må $I_\alpha(A) = B$ som viser at S ligger på linjen $\overleftrightarrow{AB}$.

b) Se figur.

5 **a)** Se figur.

b)

$$d(A,B) = |\ln([AB,PQ])| = \left|\ln\left(\frac{AP \cdot BQ}{AQ \cdot BP}\right)\right|.$$

Av symmetrigrunner er $BP = AQ$ og $BQ = AP$. Utregning gir

$$(AP)^2 = (1 - \frac{1}{2})^2 + (1 - \frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 2 - \sqrt{3},$$

$$(AQ)^2 = (\frac{1}{2})^2 + (1 - (1 - \frac{\sqrt{3}}{2}))^2 = 1.$$

Innsetting gir

$$d(A,B) = \ln(2 - \sqrt{3}).$$

c) Hvis l og m er parallelle h-linjer uten felles endepunkt, så er de buer på sirkler α og β respektive, der $\alpha \cap \beta = \emptyset$, $\alpha \perp \gamma$ og $\beta \perp \gamma$. Sirkelen σ med egenskaper som angitt i oppgave 4b) gir en h-linje s som oppfyller $s \perp l$ og $s \perp m$.